

§ A 'grande' função de onda na SPC / 1



Uma característica dos fluídos quânticos com manifestação macroscópica (condensados macroscópicos) é apresentar o fenômeno de ODLRO na matriz densidade. No caso do condensado de Bose-Einstein ODLRO aparece na Matriz Densidade de 1-partícula. No caso da SPC esperamos que essa correlação de longo alcance apareça na Matriz Densidade de 2-partículas:

$$\langle x_1' x_2' | W_2 | x_1 x_2 \rangle \equiv \text{Tr} \left\{ \rho \Psi^\dagger(x_1) \Psi^\dagger(x_2) \Psi(x_2') \Psi(x_1') \right\}$$

No caso do par de Cooper, precisamos considerar também o spin. Para pares no estado singlets do spin:

$$\begin{aligned} \langle x_1' \uparrow, x_2' \downarrow | W_2 | x_1 \uparrow, x_2 \downarrow \rangle &= \\ &= \text{Tr} \left\{ \rho \Psi_{\uparrow}^\dagger(x_1) \Psi_{\downarrow}^\dagger(x_2) \Psi_{\downarrow}(x_2') \Psi_{\uparrow}(x_1') \right\} \end{aligned}$$

Sejam (\vec{R}, \vec{R}') os centros de massa de dois pares respectivamente:

$$\vec{R} \equiv \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}, \quad \vec{R}' \equiv \frac{\vec{x}_1' + \vec{x}_2'}{2}$$

Conjecturamos que temos ODLRO em W_2 , de maneira que:

$$\langle \vec{x}'_1, \vec{x}'_2 | W_2 | \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle \xrightarrow[|\vec{R} - \vec{R}'| \rightarrow \infty]{*} \Psi^*(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \Psi(\vec{x}'_1, \vec{x}'_2),$$

onde temos usado o resultado de Penrose + Onoager, com $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ e $|\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2|$ ambos finitos.

A função de onda macroscópica é identificada com os valores médios 'anômalos' (lembrar BCS):

$$\Psi(\vec{R}) \equiv \langle \hat{\Psi}_\uparrow(\vec{x}_1) \hat{\Psi}_\downarrow(\vec{x}_2) \rangle.$$

Sabemos que isso é manifestação que expressa a não-conservação de partículas no estado fundamental de um supercondutor \Rightarrow implica numa simetria quebrada na escolha de uma fase definida.

$\Psi(\vec{R})$ é o campo usado como parâmetro de ordem num supercondutor, na teoria de Ginzburg-Landau.

Lembramos também que as médias anômalas são identificadas com o 'gap' supercondutor.

Gorkov (1959), demonstrou a partir da teoria microscópica (BCS) que obtemos a teoria de Ginzburg-Landau, com a identificação

$$\Psi(\vec{x}) \sim \Delta(\vec{x}) \sqrt{N},$$

onde \sqrt{N} é a densidade de pares e

$$|\Delta(\vec{R})| = \text{gap supercondutor.}$$

Analisamos agora a quebra de simetria no contexto da teoria de Ginzburg-Landau

Consideramos uma Densidade Lagrangiana de um campo escalar na situação estática ($\partial_t \psi = 0$). Para termos invariância de gauge, devemos introduzir o campo eletromagnético. Essa Lagrangiana tem a forma; com $\Psi = \psi_1 + i\psi_2$ (2 campos escalares)

$$\mathcal{L} = - (\nabla - ie\vec{A})\Psi \cdot (\nabla + ie\vec{A})\Psi^* - m^2 |\Psi|^2 - \lambda |\Psi|^4 - \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 \quad (1)$$

Trocando sinal obtemos: $|\Psi|^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2$

$$-\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + |(\nabla - ie\vec{A})\Psi|^2 + m^2 |\Psi|^2 + \lambda |\Psi|^4 \quad (2)$$

que podemos pensar como a Densidade de Energia livre da Teoria de Landau-Ginzburg, onde o termo da 'massa' é dependente da temperatura

$$m^2 = a_0(T - T_c) \quad (a_0 > 0). \quad (3)$$

Sabemos que para $T > T_c$, $m^2 > 0$ e o mínimo da Energia livre acontece para

$$|\Psi| = 0, \quad (\text{fase simétrica}). \quad (4)$$

Quando $T < T_c$, $m^2 < 0$, e o mínimo da

energia livre é obtido para:

$$|\psi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} \equiv a^2 \quad (5)$$

que sabemos é uma manifestação de uma 'quebra de simetria', pois na versão quantizada ψ será um operador e esse mínimo é o valor esperado do campo no vácuo:

$$a \equiv \langle 0 | \hat{\psi} | 0 \rangle = \sqrt{-\frac{m^2}{2\lambda}} \neq 0. \quad (6)$$

Se o campo for parametrizado em dois campos reais por

$$\psi = \rho e^{i\varphi} = |\psi| e^{i\varphi}, \quad (7)$$

e como $\langle 0 | \hat{\psi} | 0 \rangle$ é real, temos que

$$\langle 0 | \hat{\rho} | 0 \rangle = a, \quad \langle 0 | \hat{\varphi} | 0 \rangle = 0. \quad (8)$$

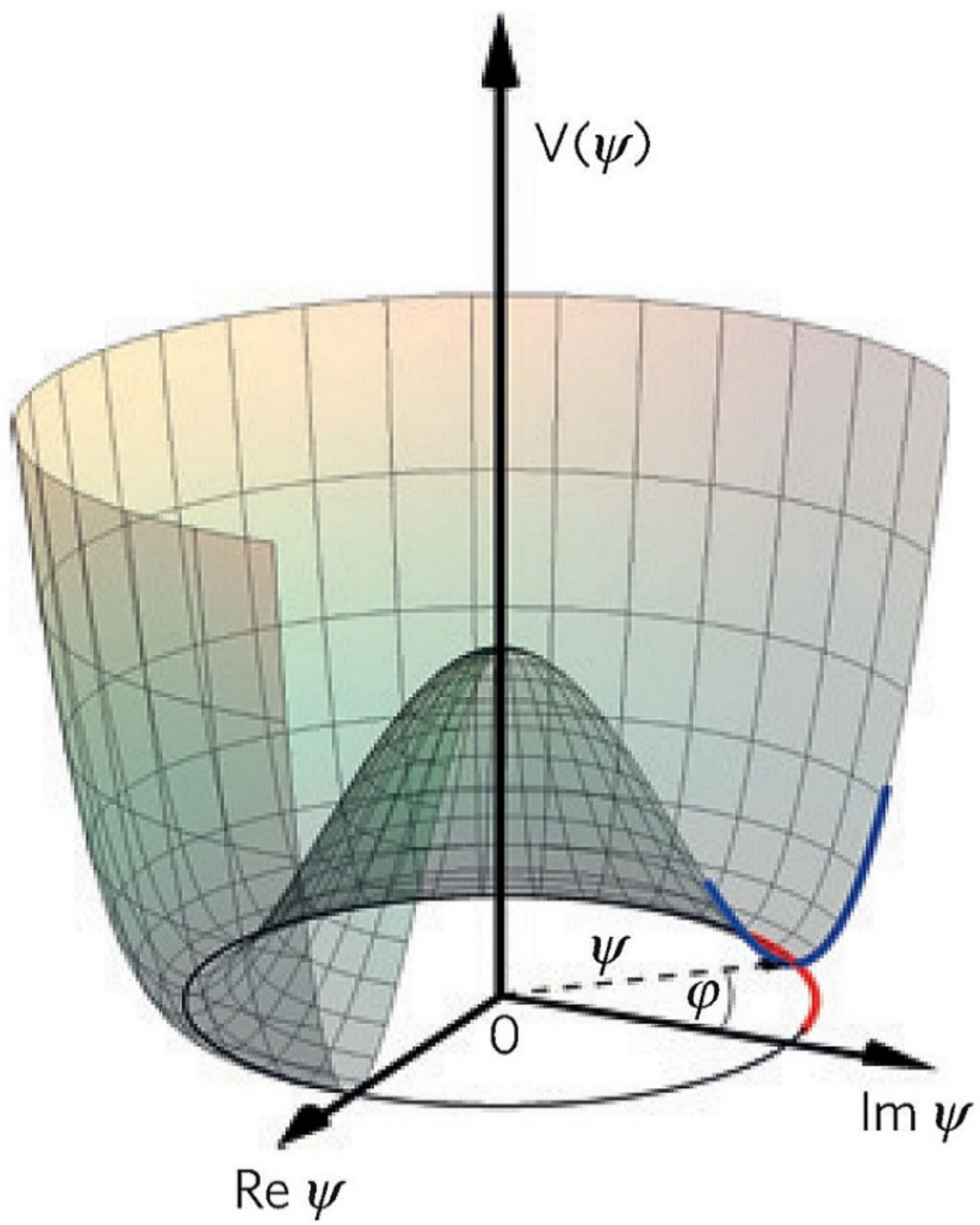
O campo $\hat{\varphi}$ não tem 'massa' (modo de Goldstone).

Esse modo de Goldstone é manifestação de uma QS global, para

$$\psi \rightarrow e^{i\Lambda} \psi,$$

que deixa invariante a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = -\nabla\psi \cdot \nabla\psi^* - m^2 |\psi|^2 - \lambda |\psi|^4 \quad (9)$$



Para ter simetria de gauge, precisamos introduzir os campos de gauge \rightarrow campos eletromagnéticos, na Lagrangiana (9). No caso estático, isso é dado pela Lagrangiana (1), que sabemos é invariante por uma transformação de gauge:

$$(10) \quad \begin{cases} \psi \rightarrow e^{i\Lambda(\vec{x})} \psi, \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \frac{1}{e} \nabla \Lambda(\vec{x}), \end{cases}$$

com

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2,$$

e $\Lambda(\vec{x})$ representa uma transformação local

A Lagrangiana (1) tem uma

densidade de corrente associada:

$$\vec{J} = \frac{1}{i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - 2e |\psi|^2 \vec{A} \quad (10)$$

bis

Se para $T < T_c$, ψ varia lentamente através da amostra, o 2do. termo em (10) domina sobre o 1ro. e:

$$\vec{J} = -2e |\psi|^2 \vec{A} = \frac{em^2}{\lambda} \vec{A}, \quad (11)$$

ou:

$$\vec{J} = -k^2 \vec{A} \quad (\text{pq. } m^2 < 0). \quad (12)$$

(London equation)

O campo elétrico é nulo: $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0,$

e a Lei de Ohm define a resistência elétrica por

$$\vec{E} = R \vec{J} \Rightarrow R = 0.$$

Temos Supercondutividade? Ainda falta um ingrediente \rightarrow Efeito Meissner

Escrevemos a Lei de Ampère (unidades práticas):

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J} \quad (13)$$

Tomando o Rotacional mais uma vez, usando

a identidade

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A},$$

e usando Maxwell para $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, temos de (12) e (13):

$$\nabla^2 \vec{B} = -\nabla \times \vec{J} = k^2 (\nabla \times \vec{A}) = k^2 \vec{B}$$

Em 1-dim, $\vec{B} \rightarrow B_x$, (perpendicular a uma interface)

$$\frac{d^2}{dx^2} B_x = k^2 B_x,$$

com solução

$$B_x = B_0 e^{-kx},$$

indicando que o campo penetra, mas decai exponencialmente na direção do 'bulk' da amostra, com comprimento de penetração:

$$\xi = \frac{1}{k} = \left(-\frac{em^2}{\lambda} \right)^{-1/2}$$

Em supercondutores convencionais:

$$\xi \sim 10^{-6} [\text{cm}] \sim 10^3 [\text{\AA}].$$

Para o potencial vetorial, temos que de:

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} = -k^2 \vec{A}$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

no gauge de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, resultando em

$$\nabla^2 \vec{A} = k^2 \vec{A}$$

ou

$$(\partial_t^2 - \nabla^2) \vec{A} = -k^2 \vec{A} \Rightarrow \square A_\mu = -k^2 A_\mu$$

ou

$$\square A_\mu = -k^2 A_\mu,$$

eq. não-homogênea com massa (k) \Rightarrow o fóton adquire massa, o que é uma manifestação do fenômeno de Higgs-Brout-Englert (HBE).

Se o campo Ψ for parametrizado inicialmente na forma

$$\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2,$$

a Lagrangiana (1) representa dois campos massivos.

Podemos comparar os modos de Goldstone e de (HBE), na forma: